Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 12 de julio de 2018.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea f holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R > 1)$ con $f(0) = 0$ y $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$.

Calcular $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) f(z)\, dz$ y deducir el valor de $\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta\, d\theta$.

(b) Analizar convergencia y calcular $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x^2+1)^2} dx$. Sug.: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Ejercicio 2.

(a) Determinar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es válida la igualdad

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(2nx)}{4n^2 - 1}$$

(b) Resolver, especificando las hipótesis necesarias sobre las funciones f y g, el problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:

$$\begin{array}{lll} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & 0 < x < l,\ t > 0 & (c > 0) \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) & 0 \leqslant x \leqslant l & \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geqslant 0 & \end{array}$$

Ejercicio 3. Sea $g(x) = \operatorname{sen} x\, f(\alpha x + \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$.

(a) Argumentar la existencia de la transformada de Fourier de g y calcularla (en términos de la transformada de Fourier de f).

(b) Para $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, resolver:

$$\begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & -\infty < x < \infty \end{array}$$

Ejercicio 4.

(a) Probar que $\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t f(u)du\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s}$, indicando hipótesis adecuadas sobre f.

(b) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int\limits_0^t z(s)\, ds = -2H(t) & y(0) = 1 \\ y' + z' + z = 0 & z(0) = -1 \end{cases} \qquad \text{con } H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$